すべての閉4次元位相多様体は単体分割をもつか(低次元多様体の幾何構造と位相構造)

中森, 信弥

数理解析研究所講究録
542巻 1985年 158-167

すべての閉4次元位相多様体は単体分割をもつか.

東工大・理　中森信弥
(Shinya NAKAMORI)

フリードマン，クィンらにより，4次元多様体の分類はあらたな局面をむかえたといえる。これらの結果が，4次元の(本来の)三角形分割問題や，3次元のケルベア・ミルナー群，Θ_3 にどの程度まで反映されるかを調べてみる。

4次元の場合，可微分圏とPL圏との差はないので，以下においては，使いやすい方を，そのつど用いることにする。

<u>補題1</u>：(W, V)　($V \subset \mathrm{int}\, W$ 局所平坦)をコンパクトPL多様体対($\partial V = \phi$)とする。このとき，

$\exists H : (W, V) \longrightarrow \mathbb{R}$　対としてのPLモース関数
$H(\partial W) = \{pt\}$.

$\exists p \in V$　；　pは，Hおよび，$H|V$の指数0の臨界点.

ここに，PL多様体のモース関数とは，たとえば，Kuiper [2] の意味でのそれとする。

<u>証明のアウトライン</u>：$W \hookrightarrow \mathbb{R}^N$（$N$：大）とみたとき、
Wの高さ関数

$$h := \mathrm{proj}_N | W \ : W \hookrightarrow \mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^{N-1}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

は、1つのPLモース関数とみることができる。ただし、

$$h(\partial W) = \{pt\}$$

なるような $W \hookrightarrow \mathbb{R}^N_+$ とする。

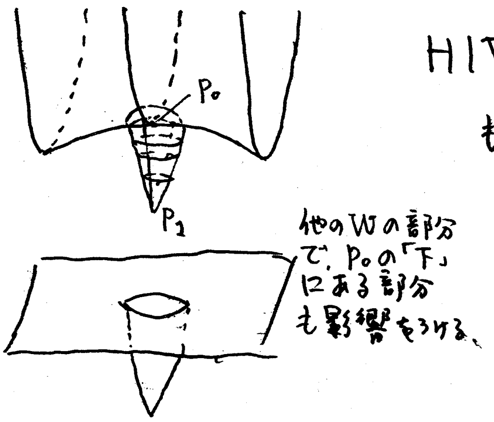
$$L : \mathbb{R}^N_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad 線型関数$$

であって、

$H' := h + (L|W)$ が 高さ関数（とくにPLモース）
かつ、$H'|V$ も 〃

が存在する。$H'|V$には、少くとも1点、指数0の臨界点p_0が存在する。このp_0にて、Wにおし、下へのプッシュ（下図参照）をおこなう。そうしてえられる

$$H : W \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$H|V : V \longrightarrow \mathbb{R}$$



もまた、高さ関数であって、p_0の行く先であるp_1は、H、$H|V$ の指数0の臨界点となっている。

□

<u>注意</u>：$(\dim W) - 1 = \dim V = 3$ のときを考える。$H(p)$に十分近い実数 $y > H(p)$ で、$(H(p), y]$ には、H、およ

び，$H|V$の臨界値が存在しないようなものがとれる。このとき，$(H|V)^{-1}(y)\cong S^2$（，$\cong$は，PL同相，ないしは，可微分同相をあらわす），かつ，3次元多様体$H^{-1}(y)$の$(H|V)^{-1}(y)$を含む連結成分Γは，$\cong S^3$である。それゆえ，3次元（PL）シェンフリーズ定理によって，（PL）2−球面$(H|V)^{-1}(y)$は，$H^{-1}(y)$で，ある（PL）3−球の境界となっている。

pとΓの結び，$p*\Gamma$，および，pと，$(H|V)^{-1}(y)$との結び，$p*(H|V)^{-1}(y)$を，pから出る，Hに関するPL積分曲線（Siebenmann [5] をみよ）で，それぞれ，Γ，$(H|V)^{-1}(y)$へ至るものの集まりとして定めることにする。そのおのおのは，（PL）4−球，（PL）3−球をなす。一方，$p*\Gamma-p*((H|V)^{-1}(y))$の連結成分の閉包，$C_+$，$C_-$は，ともに，（PL）4−球となっている。

Σ^3で，以下，任意のホモトピー・3−球面をあらわすこととし，

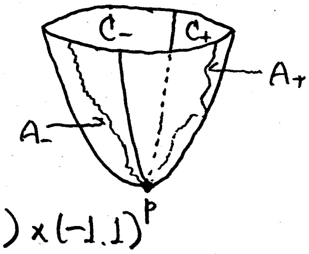
$$W:=\Sigma^3\times[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}],\quad V:=\Sigma^3\times\{0\}$$

の場合を考察する。$W\subset\Sigma^3\times(-1,1)$と自然にみるとき，2つの弧$A_+$，$A_-$を，つぎのように構成する。$p*\Gamma$では，これらは，ともに，$p$を出る弧であって，

$$(A_+\cup A_-)\cap(p*((H|V)^{-1}(y)))=\{p\},$$

$$A_\pm - \{p\} \subset C_\pm \quad (\text{複号同順}),$$

ただし，$C_\pm$ は，その正負に応じて，$\Sigma^3 \times (-1, 0)$，$\Sigma^3 \times (0, 1)$ に含まれているものとする。



さらに，こうした弧たちを，

$$(A_+ \cup A_-) \cap (\Sigma^3 \times \{0\}) = \{p\},$$

$$(\Sigma^3 \times (-1, 1)) - (A_+ \cup A_-) \cong (\Sigma^3 - \{\text{点}\}) \times (-1, 1)$$

なるよう，$\Sigma^3 \times (-1, 0)$，$\Sigma^3 \times (0, 1)$ にて自然に拡張する。

<u>定義</u>：V^nを，位相多様体とする。それの，平滑化(=smoothings) V_α, V_β が，<u>薄はぎ(=sliced) コンコルダント</u>とは，$V \times I$ の，ある平滑化 $(V \times I)_\gamma$ が，存在して，

$$(V \times \{0\})_\gamma = V_\alpha, \quad (V \times \{1\})_\gamma = V_\beta \quad ;$$

射影 $(V \times I)_\gamma \longrightarrow I$ が 正則

なるときをいう。

<u>定義</u>：V^n を，位相的 $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ とする。このとき，うめこみ

$$\varphi : S^{n-1} \hookrightarrow V^n$$

が，<u>本質的</u>であるとは，

$$S^{n-1} \overset{\varphi}{\hookrightarrow} V^n \underset{\text{同相}}{\cong} S^{n-1} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{自然な レトラクション}} S^{n-1} \times \{0\}$$

によって，誘導される，$\pi_{n-1}(S^{n-1})$ の元が，自明ならざるときをいう。

このとき，つぎが成り立つ。

<u>定理2</u>： 仮定

(H) $\left\{\begin{array}{l}\text{積の微分構造をもつ（すなわち，「標準的な」），}\\ S^3\times\mathbb{R}\text{と，うすはぎコンコルダントな，位相}S^3\times\mathbb{R}\\ =:V\text{の，平滑化}V_\alpha\text{には，つねに，なめらかで，}\\ \text{本質的な，}S^3\text{のうめこみが存在する。}\end{array}\right.$

のもとに，3次元，ケルベア・ミルナー群，Θ_3 は自明である。

<u>証明のアウトライン</u>：まず，つぎを主張する．

任意のホモトピー3-球面 Σ^3 の懸垂 $S(\Sigma^3)$ は，S^4 と同相。

なぜかというと，Σ^3 と S^3 とは，ホモトピー同値であるから，

$$\Sigma^3\times\mathbb{R} \underset{\text{(コンパクト)固有ホモトピー同値}}{\simeq} S^3\times\mathbb{R} .$$

Freedman [1] によって，

$$\Sigma^3\times\mathbb{R} \underset{\text{同相}}{\approx} S^3\times\mathbb{R} .$$

両者の，2点コンパクト化を考えて，

$$S(\Sigma^3) \approx S(S^3) = S^4 .$$

$s_\pm$ を，$S(\Sigma^3)$ の懸垂点たちとするとき，$\Sigma^3\times(-1,1)$ から，微分構造を受け継いでいる，多様体，$S(\Sigma^3)-\{s_\pm, A_\pm\}$ に注目する。これの終端(=end) U で，

$$U \cap (\Sigma^3 \times \{0\}) \subset p * \Gamma$$

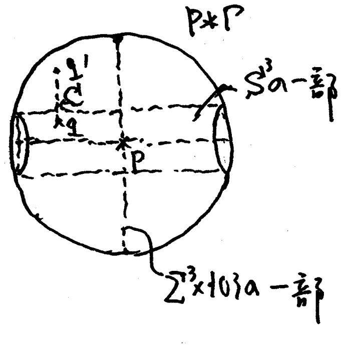
$$(U \cap \Gamma) \cap ((H \mid V)^{-1}(y)) = \phi$$

なるものをとる。$\{s_\pm\} \cup A_\pm$は，$S(\Sigma^3)$で平坦な弧であるから，

$$U \underset{\text{同相}}{\approx} S^3 \times \mathbb{R} \quad .$$

ところで，一般に，Lashof-Shaneson, Lemma 1.2 [3]と，クィンのアニュラス定理（$TOP(4)/O(4) \longrightarrow TOP/O \simeq K(\mathbb{Z}/2;3)$ が，3-連結なること）をくみあわせると，$S^3 \times \mathbb{R}$の平滑化は，ちょうど2つのうすはぎコンコルダンス類，標準的$S^3 \times \mathbb{R}$にて代表されるものと，フリードマンのにせ$S^3 \times \mathbb{R}$にて代表されるものをもつことがわかる。Uに関していえば，Lashof-Taylor, Prop. 2.2 [4]と，上のLashof-Shanesonの補題により，それの平滑化は，標準的$S^3 \times \mathbb{R}$とうすはぎコンコルダントとなる。

この状況で，われわれの仮定(H)を用いると，そうしたUには，したがって，$\Sigma^3 \times (-1,1)$には，本質的なS^3が，なめらかにうめこまれていることになる。このS^3の1点qを，たとえば，$U \cap (\mathrm{int}(p * \Gamma))$にとる。$q$から，$\Gamma$上の点$q'$へ至る，この$S^3$とは，$q$でのみ交わるような，$p * \Gamma$の弧$C$を考え，$C$にそって，$q$の$S^3$における球近傍を，



$p*P$で，PL的に，q'のPにおける球近傍へもってゆく。こうしてS^3からえられるもの，Sも，また，PL 3-球面であって，さらに，$S\cap P$は，PL 3-球，Dである。補題1のあとの注意によれば，PL 2-球面$(H|V)^{-1}(y)$は，PであるPL 3-球の境界となっているのであるから，Pの全域アイソトピーにより，$(H|V)^{-1}(y)$を，Dへもってゆくことができる。この全域アイソトピーは，アイソトピー拡張定理によって，$p*P$，$\Sigma^3\times(-1,1)-\mathrm{int}(p*P)$は，そのおのおのにうつる，$\Sigma^3\times(-1,1)$の全域アイソトピーにまで，拡張することができる。

このSにより，$\Sigma^3\times(-1,1)$を二分し，その有界な閉包をもつ連結成分を，$\square^4$とする。上の議論によれば，ある，$\Sigma^3\times\{0\}$から，あるPL 3-球をとりのぞいた，Δ^3に対して，

$(\Delta^3, \partial\Delta^3=(H|V)^{-1}(y)$(のアイソトピックな像)$\cong S^2) \subset (\square^4, \partial\square^4=S)$

は，平坦な，PL部分多様体をなす。作り方より，$\square^4$は，可縮で，コンパクトな，PL多様体である。(B^4, B^3)を，標準的球対とする。$(\square^4\cup_S B^4,\ \Delta^3\cup_{\partial\Delta^3} B^3)$を考えると，これは，平坦なPL多様体対であって，$\square^4\cup B^4$は，PL，ホモトピー4-球面であるし，一方，$\Delta^3\cup B^3$は，$\Sigma^3(\times\{0\})$にPL同相(3次元であるから，微分同相)である。よって，$(\square^4\cup B^4)-(\Delta^3\cup B^3)$の1つの連結成分の閉包を考えることにより，任意のホモトピー3-球面Σ^3が，あるPL(=な

めらか）な可縮，コンパクト4次元多様体の境界となっていることがわかる。

□

この定理よりも，仮定(H)の正否の判定が，より本質的である。この仮定は，標準的$S^3\times\mathbb{R}$にある，$S^3\times\{0\}$を，「うすはぎ」性によって，保証されている，いたるところ正則な$S^3\times\mathbb{R}\times I$の平滑化のモース関数に与えられる，積分曲線で，$S^3\times\{0\}$から出発するものを，うまく，有界領域にとどめておくことができるか，という問題に，密接に関連することは，いうまでもない。

<u>命題3</u>：仮定

(H') $\left\{\begin{array}{l}\text{任意のホモトピー3-球面は，（本物の）3-球面} \\ \text{と，H-コボルダントである}\end{array}\right.$

のもとに，任意の単体分割可能な，符号づけられた，スピン，4次元，閉位相多様体Mの，符号数，$\sigma(M)$につき，

$$\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16}$$

が，成り立つ。

<u>証明</u>：Tを，Mの十分細かい三角形分割とし，vを，Tの頂点で，$|lk(v,T)|$が，偽ホモトピー・3-球面（そうした

意味で，「特異点」というなるものとする。X^4を，$|lk(v,T)|$と，$S^3=\partial D^4\subset D^4$との，H-コボルディズムとする。このとき，$Y^4:=|st(v,T)|\cup_{|lk(v,T)|}X^4\cup_{S^3}D^4$により，あるコンパクト・非輪状，多面体的，4次元ホモロジー多様体がえられる。いま，コンパクト・多面体的5次元ホモロジー多様体，$M\times I\cup_{|st(v,T)|\times\{1\}}\mathrm{cone}(Y^4)$を考えると，これの境界は，$-M$と，$M$から特異点$v$が，解消されたホモロジー多様体，$M(v)$である。よって，$M$と$M(v)$の符号数は，同じである。作り方より，両者のスピンも等しい。すべての特異点につき，これをおこなうと，あるPL（したがって，なめらかな）4次元多様体，$M(P)$で，

$$\sigma(M)=\sigma(M(P)) \quad ，かつ，\quad w_2(M)\equiv w_2(M(P)) \pmod 2$$

なるものが，えられる。しかるに，可微分圏における，ローリンの定理により，

$$\sigma(M(P))\equiv 0 \pmod{16} 。$$

ゆえに，

$$\sigma(M)\equiv 0 \pmod{16} .$$

□

系：定理1の，仮定(H)のもとに，ある4次元，閉位相多様体で，単体分割不能なものが存在する。

じっさい，(H)ならば，(H') であり，(H') の状況で，フリードマン（[1]）の閉位相多様体，$|E_8|$ をとれば，それは，上の命題を，満足しないから。

参考文献

[1]. M. H. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, J. Diff. Geom., <u>17</u> (1982), 357-453.

[2]. N. H. Kuiper, Non-degenerate piecewise linear functions, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., <u>13</u> (1968), 993-1000.

[3]. R. Lashof and J. Shaneson, Smoothing 4-manifolds, Inv. Math., <u>14</u> (1971), 197-210.

[4]. ——— and L. Taylor, Smoothing theory and Freedman's work on four-manifolds, preprint.

[5]. L. C. Siebenmann, Deformation of homeomorphisms on stratified sets, Comm. Math. Helv., <u>47</u> (1972), 123-163.